

文章编号:1000-8055(2012)09-1997-07

台阶流模型流场的局部 DQ-Lagrange 求解方法

孙 丹¹, 杨建刚², 赵 欢¹, 李广超¹

(1. 沈阳航空航天大学 航空航天工程学部, 沈阳 110136;

2. 东南大学 能源与环境学院 火电机组振动国家工程研究中心, 南京 210096)

摘 要: 以 Lagrange 多项式作为 Differential Quadrature(DQ)方法的基函数,应用局部 DQ-Lagrange 方法对 Navier-Stokes 方程进行了数值求解,建立了基于局部迎风 DQ-Lagrange 方法的复杂台阶流场求解模型. 并在此研究基础上,提出了本质和自然边界条件的处理方法. 分析了支持域的选择、边界条件处理方法、迎风机制等对求解精度的影响. 结果表明:支持域较大时, Lagrange 高阶插值易出现振荡现象,可以采用局部替代全局的插值方法;迎风支持域的加入可以提高求解精度;建模时速度支持域的选择应该大于压力支持域.

关 键 词: 台阶流; 微分求积法; Lagrange 多项式; Navier-Stokes 方程; 迎风机制

中图分类号: O357.1

文献标志码: A

Research on local DQ-Lagrange method for solving
flow field in step flowSUN Dan¹, YANG Jian-gang², ZHAO Huan¹, LI Guang-chao¹

(1. Engineering Division of Aerospace,

Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China;

2. National Engineering Research Center of Turbo-Generator Vibration,

School of Engineering and Environment, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: An upwind local differential quadrature-Lagrange interpolation method to solve the Navier-Stokes equations for the flow field in the complex step flow was set up. The method to impose the essential boundary condition and the natural boundary condition was improved. The effect of support domain size, boundary condition treatment method and the upwind scheme on the accuracy of the calculation were analyzed. Calculation simulation shows that the high order Lagrange interpolation may cause numerical oscillation. The local differential quadrature method was recommended. The upwind support domain can improve the accuracy of the solution. Solution accuracy may be better in case of that the velocity support domain is larger than the pressure support domain.

Key words: step flow; differential quadrature method; Lagrange polynomial; Navier-Stokes equations; upwind scheme

航空发动机尾锥、密封等部件流场的求解模型常简化为台阶流求解模型^[1-2]. 台阶流模型是典型的计算流体力学求解模型, 目前常用求解该模

型的数值方法主要有有限差分法、有限体积法、有限元法等. 以上方法都是建立在网格化基础上. 近年来, 无网格方法在计算流体力学领域得

收稿日期: 2011-10-18

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20120921.1251.011.html>

基金项目: 航空科学基金(2010ZB54004); 辽宁省教育厅基金(L2010425)

作者简介: 孙丹(1981—), 男, 辽宁丹东人, 讲师, 博士, 主要从事计算流体力学研究.

到广泛关注. 当遇到网格划分困难、网格突变、网格移动等问题时, 无网格方法具有一定的优势^[3-4].

微分求积(differential quadrature, DQ)法^[5-6]是典型的配点型无网格方法. 其基本思想是将函数对某一变量的偏导数用此变量方向上离散点处的函数值加权来逼近. DQ 方法已在结构力学^[7-9]、流体力学^[10-11]、热传导^[12]等许多领域得到应用. Shu 等分别提出了基于 Lagrange 多项式、傅里叶级数及径向基函数的 DQ 方法^[13-15]. 文献^[10]将 SIMPLE(semi-implicit method for pressure linked equation)算法与 DQ 方法相结合, 对 Navier-Stokes(N-S) 方程进行了数值求解. 文献^[11-12]提出了具有迎风机制的局部 DQ 方法, 对二维渐缩管道内流场进行了数值求解. 研究表明: DQ 方法等价于高阶有限差分法, 可以用较少节点获得较高的精度^[16].

本文将 DQ-Lagrange 方法引入到台阶流场求解模型, 建立了基于局部迎风 DQ-Lagrange 方法的复杂台阶流场求解模型. 在传统方法基础上, 提出了本质和自然边界条件的改进处理方法. 分析了支持域、边界条件处理方法、迎风机制等因素对求解精度的影响.

1 局部迎风 DQ-Lagrange 方法

1.1 DQ-Lagrange 方法

记函数 f 对 X 的一阶导数为 f_X , 对 X 的 2 阶导数为 f_{XX} , 则在点 (i, j) 处有

$$f_X(i, j) = \sum_{k=1}^N w_X^1(i, k) f(k, j) \quad (1a)$$

$$f_{XX}(i, j) = \sum_{k=1}^N w_X^2(i, k) f(k, j) \quad (1b)$$

式中 N 是 X 方向所有节点的个数, w_X^1, w_X^2 分别表示节点在 X 方向 1 阶和 2 阶导数的权系数.

本文以 Lagrange 多项式为基函数来确定 DQ 方法的权系数. 给定 N 个离散点处的函数值 $f(X_k)$, 函数 $f(X)$ 可以表示为

$$f(X) = \sum_{k=1}^N l_k(X) f(X_k) \quad (2)$$

其中

$$l_k(X) = \prod_{i=1, i \neq k}^N \frac{X - X_i}{X_k - X_i} \quad (3)$$

由式(2)对 X 求 1 阶导数, 得到

$$f'(X) = \sum_{k=1}^N l'_k(X) f_k \quad (4)$$

从而有

$$f'_i = f'(X_i) = \sum_{k=1}^N l'_k(X_i) f_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, N) \quad (5)$$

比较式(5)与式(1)可知

$$w_X^1(i, k) = l'_k(X_i) = \begin{cases} \frac{\prod (X_i)}{(X_i - X_k) \prod X_k}, & i \neq k \\ -\sum_{k=1, k \neq i}^N w_X^1(i, k), & i = k \end{cases} \quad (6a)$$

同理, 权系数的 2 阶导数为

$$w_X^2(i, k) = l''_k(X_i) = \sum_{v=1}^N w_X^1(i, v) w_X^1(v, k) \quad (i, k = 1, 2, \dots, N) \quad (6b)$$

其中

$$\prod (X_i) = \prod_{v=1, v \neq i}^N (X_i - X_v) \\ \prod (X_k) = \prod_{v=1, v \neq k}^N (X_k - X_v)$$

式中 w_Y^1, w_Y^2 可同样由式(6)求得.

1.2 局部迎风 DQ-Lagrange 方法

传统 DQ 方法将节点偏导数用 X 或 Y 方向上所有节点函数值加权来逼近. 这种方法不仅不适用于不规则区域求解, 而且当节点数较多时, 由于插值阶数的增加, Lagrange 插值易出现振荡现象. 局部 DQ 方法采用局部区域内节点函数值加权逼近某节点的偏导数, 即

$$f_X(i, j) = \sum_{k=1}^n w_X^1(i, k) f(X_k, Y_j) \quad (7)$$

式中 n 为局部支持域内加权节点的个数.

当雷诺数较大时, 由于对流现象容易出现数值解的振荡. 为此, 可在此基础上进一步引入迎风机制, 即

$$X_i - a_l d \leq X_k \leq X_i + a_r d \quad (8)$$

其中 a_l, a_r 分别是计算节点上游和下游支持域大小系数, $a_l > a_r$, d 为节点平均间距. 具有迎风机制的局部支持域模型如图 1 所示.

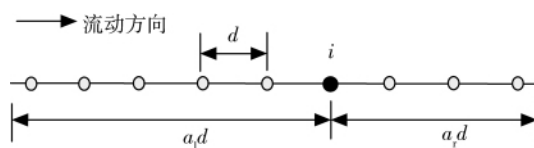


图 1 具有迎风机制的局部支持域模型

Fig. 1 Local support domain model with upwind scheme

2 复杂台阶流求解模型

在大量数值计算的基础上,本文建立了复杂台阶流模型.模型台阶无量纲化后的高度为 0.6,宽度为 0.5,腔室宽度为 1.5.建模时采用均匀节点布置.对不同节点密度计算分析后,取边界节点个数为 257,内部节点个数为 800,如图 2 所示.

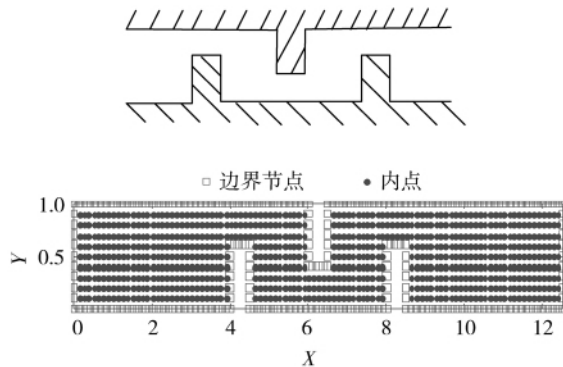


图 2 台阶流模型

Fig. 2 Step flow model

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n w_X^1(i,k)u(i,k) + \sum_{l=1}^m w_Y^1(l,j)v(l,j) = 0 \\ u_{i,j} \sum_{k=1}^n w_X^1(i,k)u(i,k) + v_{i,j} \sum_{l=1}^m w_Y^1(l,j)u(l,j) + \sum_{k=1}^n w_X^1(i,k)p(i,k) \cdot \\ \frac{1}{Re} \left[\sum_{k=1}^n w_X^2(i,k)u(i,k) + \sum_{l=1}^m w_Y^2(l,j)u(l,j) \right] = 0 \\ u_{i,j} \sum_{k=1}^n w_X^1(i,k)v(i,k) + v_{i,j} \sum_{l=1}^m w_Y^1(l,j)v(l,j) + \sum_{l=1}^m w_Y^1(l,j)p(l,j) \cdot \\ \frac{1}{Re} \left[\sum_{k=1}^n w_X^2(i,k)v(i,k) + \sum_{l=1}^m w_Y^2(l,j)v(l,j) \right] = 0 \end{cases} \quad (10)$$

这是一组非线性方程组,可采用 Levenberg-Marquardt(L-M)方法来迭代求解. L-M 算法是对高斯牛顿法的改进,在方程病态和奇异时比较有效.

2.2 边界条件

边界条件对计算结果准确性及求解稳定性影响较大.本文采用的边界条件如下:

1) 进口

$$u^* = 1, v^* = 0, p^* = 0$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial X^*} + \frac{\partial v^*}{\partial Y^*} = 0$$

2) 水平壁面

$$u^* = 0, v^* = 0, \frac{\partial v^*}{\partial Y^*} = 0$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial Y^*} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v^*}{\partial Y^{*2}}, \frac{\partial u^*}{\partial X^*} + \frac{\partial v^*}{\partial Y^*} = 0$$

2.1 DQ-Lagrange 求解模型的建立

二维不可压缩黏性 N-S 方程的无量纲形式为

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial X^*} + \frac{\partial v^*}{\partial Y^*} = 0 \\ u^* \frac{\partial u^*}{\partial X^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial Y^*} = \\ -\frac{\partial p^*}{\partial X^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial Y^{*2}} \right) \\ u^* \frac{\partial v^*}{\partial X^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial Y^*} = \\ -\frac{\partial p^*}{\partial Y^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial Y^{*2}} \right) \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$X^* = X/H, Y^* = Y/H, u^* = u/u_0,$$

$$v^* = v/u_0, p^* = p/\rho u_0^2, Re = \rho u_0 H/\mu$$

μ 为动力黏度, H, u_0 分别为特征长度和特征速度.

对于模型内部节点 (i, j) , 应用局部 DQ 方法对方程(9)进行变换,得

竖直壁面

$$u^* = 0, v^* = 0, \frac{\partial u^*}{\partial X^*} = 0$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial X^*} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u^*}{\partial X^{*2}}, \frac{\partial u^*}{\partial X^*} + \frac{\partial v^*}{\partial Y^*} = 0.$$

3) 出口

$$\frac{\partial u^*}{\partial X^*} = 0, \frac{\partial v^*}{\partial X^*} = 0, \frac{\partial p^*}{\partial X^*} = 0,$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial X^*} + \frac{\partial v^*}{\partial Y^*} = 0.$$

2.3 边界条件的处理方法

传统 DQ 模型本质边界条件和自然边界条件处理方法相同,即将其作为控制方程中的一组约束方程,通过迭代求解使约束方程误差最小.计算表明:这种处理方法不仅边界条件无法准确满足,而且边界条件的误差会直接影响区域内点的计算

精度. 为提高求解精度, 本文分别提出如下处理方法.

2.3.1 本质边界条件

将本质边界节点和内部节点分开, 即

$$\begin{cases} U = \{u_1, u_2, \dots, u_{N_b-1}, u_{N_b}, \\ u_{N_b+1}, \dots, u_{N_b+N_i-1}, u_{N_b+N_i}\} \\ V = \{v_1, v_2, \dots, v_{N_b-1}, v_{N_b}, \\ v_{N_b+1}, \dots, v_{N_b+N_i-1}, v_{N_b+N_i}\} \\ P = \{p_1, p_2, \dots, p_{N_b-1}, p_{N_b}, \\ p_{N_b+1}, \dots, p_{N_b+N_i-1}, p_{N_b+N_i}\} \end{cases} \quad (11)$$

其中 $\{u_1, u_2, \dots, u_{N_b}\}, \{v_1, v_2, \dots, v_{N_b}\}$ 为固壁节点速度, 满足无滑移边界条件. $\{p_1, p_2, \dots, p_{N_b}\}$ 为进口压力, 上述量均已知. 因此迭代时, 求解未知量可以仅设为内部各点变量, 本质边界条件不再参与迭代. 这样处理后, 边界条件可以得到精确满足.

2.3.2 自然边界条件

计算表明, 传统配点型方法在处理自然边界条件时求解精度较差, 而自然边界条件处理方法对求解结果影响较大. 为了避免直接应用导数边界条件, 本文采用有限差分法来处理自然边界条件.

以水平固壁为例, 如图 3 所示, 压力 p 满足

$$\frac{\partial p_i^*}{\partial Y_i^*} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_i^*}{\partial Y_i^{*2}} \quad (12)$$

由有限差分格式

$$\frac{\partial p_i^*}{\partial Y_i^*} = \frac{-3p_i^* + 4p_{i+1}^* - p_{i+2}^*}{2\Delta Y^*} \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 v_i^*}{\partial Y_i^{*2}} = \frac{v_i^* - 2v_{i+1}^* + v_{i+2}^*}{\Delta Y^{*2}} \quad (14)$$

将式(13)、式(14)代入式(12), 得

$$p_i^* = \frac{4p_{i+1}^* - p_{i+2}^* - \frac{2}{Re} \frac{v_i^* - 2v_{i+1}^* + v_{i+2}^*}{\Delta y^*}}{3} \quad (15)$$

对于出口节点

$$\frac{\partial \varphi_i^*}{\partial x_j^*} = 0, \quad \varphi = u, v, p \quad (16)$$

根据有限差分法

$$\frac{\partial \varphi_i^*}{\partial X_j^*} = \frac{-3\varphi_i^* + 4\varphi_{j-1}^* - \varphi_{j-2}^*}{2\Delta X^*} \quad (17)$$

$$\varphi_i^* = (4\varphi_{j-1}^* - \varphi_{j-2}^*)/3 \quad (18)$$

内部流场求出后, 由式(15)和式(18)即可求出边界点压力和速度分布.

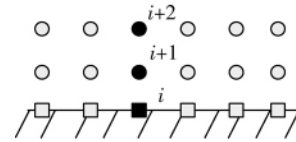


图 3 固壁节点

Fig. 3 Points on the wall

2.4 附加约束方程

在计算分析基础上, 发现在求解模型中加入两个约束方程可以提高求解精度.

1) 加入截面流量相等约束方程

$$\sum_{i=1}^{M_j} u_{i,j}^* \frac{H_j^*}{M_j} = H_1 \times u_{\text{inlet}}^* \quad (j = 1, 2, \dots, L_n) \quad (19)$$

其中 u_{inlet}^* 为进口流速, M_j 为求解模型 Y 方向的分段数, H_j 为各列的高度, L_n 为 X 方向的分段数.

2) 固壁节点上加入连续性方程

$$\sum_{k=1}^n \omega_X^1(i, k) u(i, k) + \sum_{l=1}^m \omega_Y^1(l, j) v(l, j) = 0 \quad (20)$$

3 计算结果及分析

为了验证本文的计算方法, 定义本文计算结果与 Fluent 软件计算结果的相对误差

$$\epsilon = \frac{1}{N_i} \sum_{i=1}^{N_i} \left| \frac{X_i^{\text{DQ-Lagrange}} - X_i^{\text{Fluent}}}{X_i^{\text{Fluent}}} \right| \times 100\% \quad (21)$$

式中 ϵ 为平均相对误差; X_i 为求解域各个节点的 u, v, p ; N_i 求解域内部节点的个数.

3.1 全局与局部支持域对计算结果的影响分析

以顶盖驱动方腔流为算例, 比较了全局和局部支持域对计算结果的影响. 方腔流模型无量纲长度为 1. 模型采用 31×31 的均匀节点布置.

图 4 是不同支持域系数下的平均相对误差, 全局支持域的系数为 30. 由图中可以看出, 随着支持域系数值的增大, 求解误差先减小后增加直至发散. 其间有一误差最小点. 这是因为插值节点较多时, DQ-Lagrange 方法出现了高阶插值引起的数值振荡现象. 图 5 分别是局部和全局支持域下求出的方腔流模型速度矢量图. 比较两图可以看出, 全局支持域求出的流场误差较大, 局部支持域采用适当的插值节点数可以取得较高的计算精度.

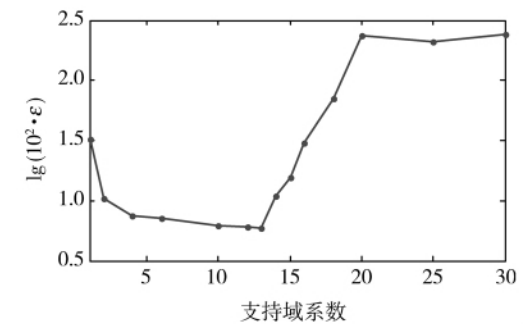


图 4 不同支持域的平均相对误差 ($Re=100$)
Fig. 4 Mean error in the different support domains ($Re=100$)

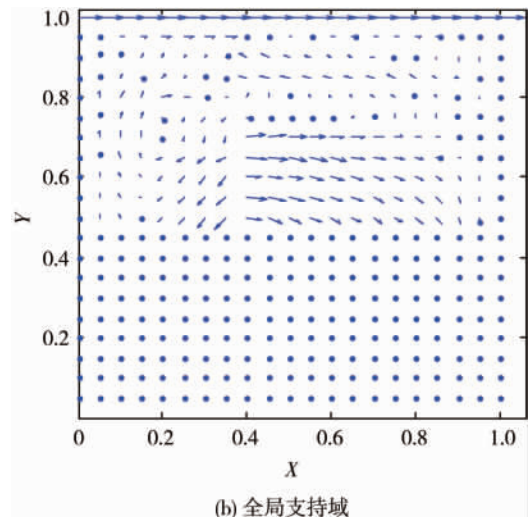
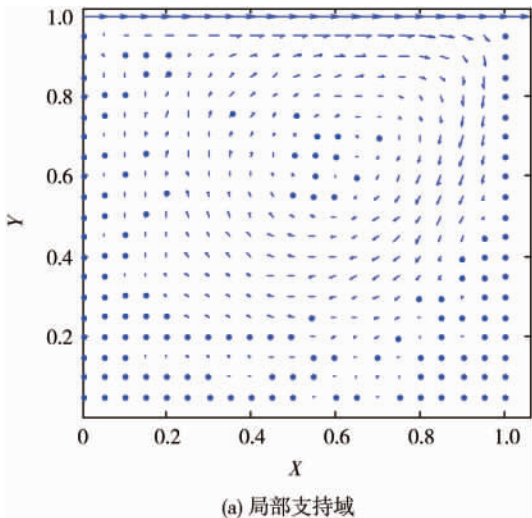


图 5 不同支持域下的速度矢量图 ($Re=100$)
Fig. 5 Vector diagram of the different support domains ($Re=100$)

3.2 速度/压力支持域对计算结果的影响分析

表 1 给出本文台阶流求解模型速度、压力采

用不同支持域时的平均相对误差. 分析表明, 当速度支持域大于压力支持域时, 计算精度较高. 因此建模时, 速度支持域应大于压力支持域.

表 1 速度压力不同支持域的平均相对误差
Table 1 Mean error with the different vector and pressure support domains

支持域系数		平均相对误差/%	
速度	压力	速度	压力
$a_l=5$ $a_r=5$	$a_l=8; a_r=8$	12.51	21.33
	$a_l=6; a_r=6$	9.45	17.83
	$a_l=5; a_r=5$	7.81	15.67
	$a_l=4; a_r=4$	7.53	9.65
	$a_l=2; a_r=2$	7.44	9.18

3.3 迎风支持域对计算结果的影响分析

表 2 给出了不同迎风支持域下的平均相对误差. 由计算结果可见, 当上游支持域系数小于 7 时, 随着上游支持域系数的增大, 求解精度增加, 迎风机制改善了求解精度. 当上游支持域系数大于 7 后, 随着上游支持域系数增加, 求解精度降低, 这是由于 Lagrange 高阶插值误差所引起的.

表 2 不同迎风支持域的平均相对误差 (单位: %)
Table 2 Mean error in the different upwind support domains (unit: %)

Re		100	150	200	250	300
无迎风	$a_l=4; a_r=4$	7.66	8.57	8.79	9.07	9.36
	$a_l=5; a_r=4$	7.21	7.93	8.31	8.56	8.81
	$a_l=6; a_r=4$	7.10	7.55	7.90	8.17	8.21
迎风	$a_l=7; a_r=4$	6.85	7.16	7.36	7.53	7.66
	$a_l=8; a_r=4$	7.92	8.34	8.58	8.83	9.11
	$a_l=10; a_r=4$	12.3	14.6	14.8	14.7	15.5

3.4 边界条件处理方法对计算结果的影响分析

图 6 是采用传统方法将本质边界条件作为约束方程后求解得到的壁面速度图. 从图中可以看出壁面的速度值不为零, 特别在台阶处. 图 7 是自然边界条件分别采用两种处理方法后求解得到的壁面压力图. 可以看出, 传统自然边界条件处理方法的求解精度较差. 当台阶较高时, 误差更明显.

3.5 计算结果

图 8 是本文方法与 Fluent 软件计算得到的

迷宫密封流场壁面压力图. 图 9 为不同 Re 下台阶流流场速度矢量图. 压力的平均相对误差为 9.18%, 速度平均相对误差小于 8%. 由图中可以看出, 当流体流经台阶间隙时, 流速增高, 压力降低. 当流体进入空腔时, 流场面积突然增大, 由流体的旋转运动而产生旋涡, 且随着 Re 的增加, 旋涡的面积逐渐增大.

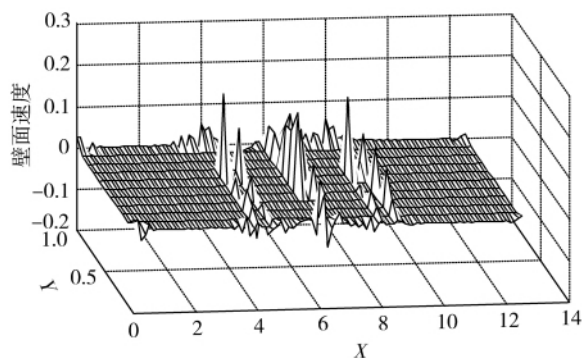


图 6 传统方法求解得到的壁面速度值

Fig. 6 Vector on the wall solved by the traditional method

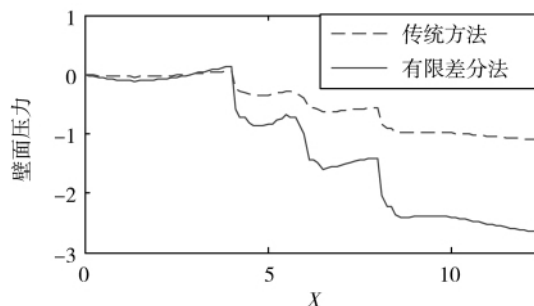


图 7 两种方法求解得到的壁面压力值

Fig. 7 Pressure on the wall solved by the two different methods

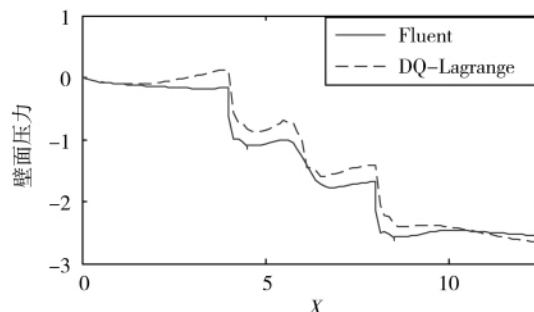


图 8 壁面节点压力

Fig. 8 Pressure on the wall

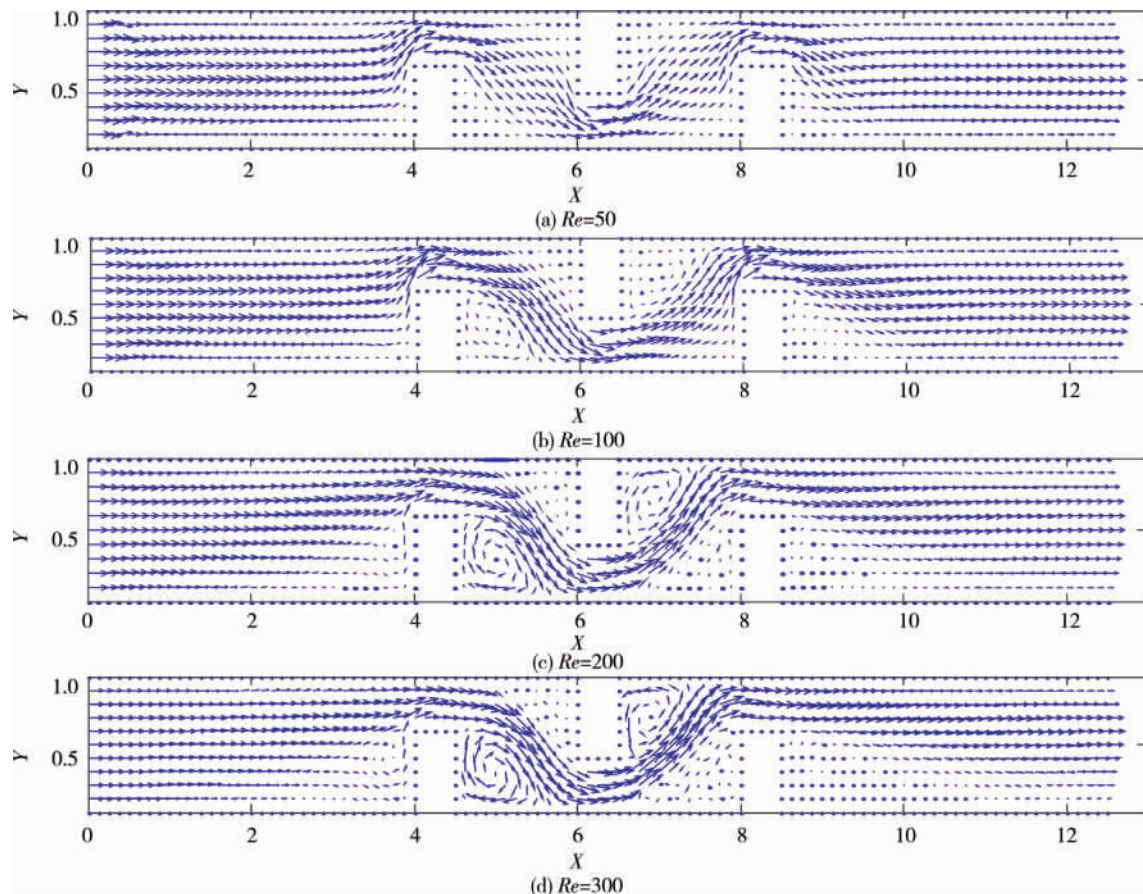


图 9 速度矢量图

Fig. 9 Vector diagram

4 结 论

本文建立了基于局部迎风 DQ-Lagrange 方法的复杂台阶流场求解模型. 得出如下结论:

1) 传统 DQ 方法采用全局插值思想, 当节点数较多时, Lagrange 插值易出现数值振荡和发散现象.

2) 本文本质和自然边界条件处理方法提高了求解精度.

3) 速度和压力支持域相同时, 求解误差较大, 建模时速度支持域应该大于压力支持域.

4) 在 DQ-Lagrange 方法中加入迎风机制, 可以提高求解精度.

参考文献:

- [1] 黄守龙, 马毓义, 武晓松, 等. 迷宫通道内部流动和泄漏特性的数值分析[J]. 航空动力学报, 1995, 10(2): 135-138, 199.
- HUANG Shoulong, MA Yuyi, WU Xiaosong, et al. Numerical analysis of flow and leakage in labyrinth seal[J]. Journal Aerospace Power, 1995, 10(2): 135-138, 199. (in Chinese)
- [2] 周铮, 孙正中, 苏莫明. 基于后掠台阶流动的航空发动机尾锥流线型设计方法[J]. 燃气涡轮试验与研究, 2009, 22(4): 57-60.
- ZHOU Zheng, SUN Zhengzhong, SU Moming. Streamline design method of aero-engine exhaust cone based on backward-facing step flow[J]. Gas Turbine Experiment and Research, 2009, 22(4): 57-60. (in Chinese)
- [3] 陶文铨, 吴学红, 戴艳俊. 无网格数值求解方法[J]. 中国电机工程学报, 2010, 30(5): 1-10.
- TAO Wenquan, WU Xuehong, DAI Yanjun. Numerical solutions of meshless methods[J]. Proceedings of the CSEE, 2010, 30(5): 1-10. (in Chinese)
- [4] 张雄, 刘岩, 马上. 无网格法的理论及应用[J]. 力学进展, 2009, 39(1): 1-36.
- ZHANG Xiong, LIU Yan, MA Shang. Meshless method and their applications[J]. Advances in Mechanics, 2009, 39(1): 1-36. (in Chinese)
- [5] Bellman R E, Casti J. Differential quadrature and long term integration[J]. Math. Anal. Appl., 1971, 34(1): 235-238.
- [6] Bellman R E, Kashef B G, Casti J. Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations[J]. Comput. Phys., 1972, 18(10): 40-52.
- [7] 荆洪英, 金基铎, 闻邦椿. 一端固定具有中间支承输流管道临界流速及稳定性分析[J]. 机械工程学报, 2009, 45(3): 89-93.
- JING Hongying, JIN Jiduo, WEN Bangchun. Stability and critical flow velocity analysis of a clamped pipe conveying fluid with intermediate support[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(3): 89-93. (in Chinese)
- [8] 梁枢平, 李宏锋, 陈文. DQ 法解圆拱在静水压力下的稳定问题[J]. 华中理工大学学报, 1997, 25(1): 79-86.
- LIANG Shuping, LI Hongfeng, CHEN Wen. The stability problem of a circular arch under hydrostatic pressure solved by the DQ method[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology, 1997, 25(1): 79-86. (in Chinese)
- [9] 王永亮, 王鑫伟. 高精度微分求积曲梁单元的建立与应用[J]. 南京航空航天大学学报, 2001, 33(6): 516-520.
- WANG Yongliang, WANG Xinwei. On a high-accuracy curved differential quadrature beam element and its applications[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2001, 33(6): 516-520. (in Chinese)
- [10] 徐天茂, 张立翔, 何士华. 基于微分求积法的三维非恒定、不可压 N-S 方程的数值计算模型[J]. 昆明理工大学学报, 2005, 30(4): 63-68.
- XU Tianmao, ZHANG Lixiang, HE Shihua. Numerical computation model of unsteady 3d incompressible Navier-Stokes equation by differential quadrature[J]. Journal of Kunming University of Science and Technology, 2005, 30(4): 63-68. (in Chinese)
- [11] WUN Jianan, ZHU Zhengyou. Upwind local differential quadrature method for solving incompressible viscous flow[J]. Comput. Method Appl. Mech. Engrg., 2000, 188(2): 495-504.
- [12] 阿尔赛夫 A S J, 朱正佑. 求解粘性流体和热迁移联立方程的迎风局部微分求积法[J]. 应用数学和力学, 2004, 25(10): 1033-1041.
- Al-Saif A S J, ZHU Zhengyou. Upwind local differential quadrature method for solving coupled viscous flow and heat transfer equations[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2004, 25(10): 1033-1041. (in Chinese)
- [13] Shu C, Richards B F. Application of generalized differential quadrature to solve two dimensional incompressible Navier-Stokes equations[J]. Int. J. Numer. Method in Fluid, 1992, 15(7): 791-798.
- [14] Shu C, Chew Y T. Fourier expansion-based differential quadrature and its application to Helmholtz eigenvalue problems[J]. Commun. in Numer. Methods in Eng., 1997, 13(8): 643-653.
- [15] Shu C, Ding H, Chen H Q, et al. An upwind local RBF-DQ method for simulation of inviscid compressible flows[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 193(6): 2001-2017.
- [16] Shu C, Chew Y T. On the equivalence of generalized differential quadrature and highest order finite difference scheme[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1997, 155(3/4): 249-260.